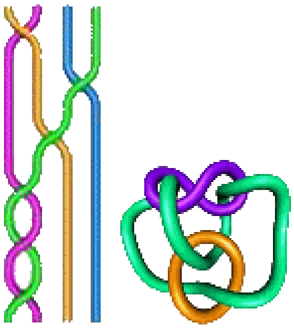
http://planetesciences.fr.gd/Th-e2-orie-des-Noeuds.htm

René Descartes avait imaginé un système du monde, où l'Univers était animé par des tourbillons. À la fin du siècle dernier, Tait et Thomson (plus connu sous le nom de Lord Kelvin) ont ressuscité cette théorie, et interprété les liaisons chimiques en imaginant des molécules nouées qui s'enlaceraient. Les développements ultérieurs de la physique et de la chimie ont amené une autre théorie de la liaison chimique, fondée sur le partage d'électrons entre les atomes (voir chapitre de chimie quantique). Mais le sujet des noeuds était lancé ; dans certains domaines, les noeuds seront... le noeud du sujet.

Remarque: La dénomination "théorie des noeuds" qui c'est imposée dans la communauté scientifique est assez malheureuse. Certains mathématiciens (francophones) ont choisi à juste raison d'utiliser plutôt la dénommination "théorie des tresses et entrelacs" qui est plus correcte et générale.

La théorie mathématique des noeuds a été lancée par les travaux de Little et Kirkman, qui cherchaient donc à donner un fondement aux idées physiques de Tait et Kelvin (voir plus loin pour le détail de l'histoire). Les premières classifications des noeuds utilisaient une image filiforme des noeuds, sans épaisseur, et une projection plane, comme l'ombre portée sur un écran. Un des caractères immédiatement perceptibles concerne les croisements où nous distinguons le brin au-dessus et le brin au-dessous. Les cannages, ou les tressages de bandes, reposent ainsi sur la considération des croisements, et le nombre de tels croisements sera le premier élément de classification.

Voici un exemple de tresse (ensemble de brins) et la chaîne correspondante (une chaîne est une tresse que l'on a refermé) :



(1)

Une première difficulté apparaît alors : un noeud (chaîne avec un seul brin) est un objet géométrique à trois dimensions, et nous utilisons une représentation plane obtenue en projetant le noeud sur un plan.

Remarque: Tout nœud ou toute chaîne peut donc être obtenue à partir d'une tresse.

Il existe alors de nombreux points de vue possibles, et diverses apparences d'un même noeud. Deux noeuds de projections différentes sont-ils distincts (non isotopes) ? Dans la première table publiée (celle de Tait et Little) le nombre minimal de croisements est utilisé comme principe de classification (jusqu'à dix croisements) et il fallut presque un siècle pour détecter une duplication : deux noeuds identiques avaient été pris pour différents.

En pratique un nœud ressemble plutôt à ceci:

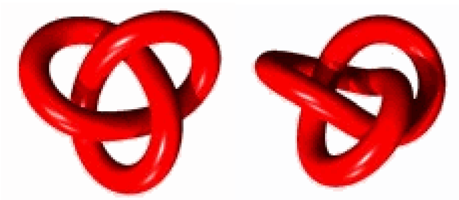
(2)

mais les mathématiciens ont pris l’habitude de connecter les deux extrémités de la corde pour obtenir ceci:

(3)

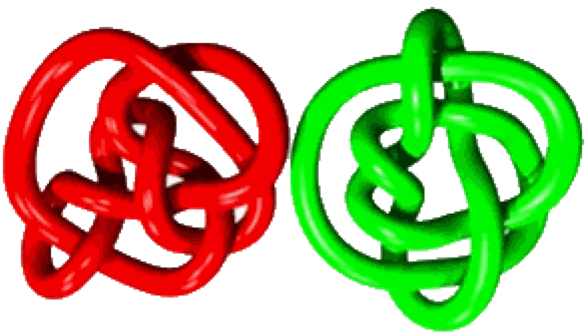
donc un nœud est toujours une boucle qui se referme sur elle-même.

Les deux nœuds sont deux représentations du même type de nœud : le "nœud de trefle".



(4)

Plus difficile, Perko a montré que ces deux nœuds de la paire dite "paire de Perko", sont en fait le même nœud:



(5)

Il n’est donc pas évident de savoir lorsque deux objets physiques représentent fondamentalement le même nœud. Mais, c’est cela qui intéresse les mathématiciens. Plus précisément, ils aimeraient classifier les nœuds, c’est-à-dire déterminer tous les types de nœuds qui sont fondamentalement différents et pas simplement en apparence (c'est la même idée qu'en topologie ou les mathématiciens ont réussie à démontrer que tout volume se réduisait à trois volumes primaires).

Avec le temps et les efforts des mathématiciens, trois points de vue mathématiques essentiels pour l'étude des noeuds se sont dégagés :

1. Topologique, où le noeud est conçu comme la réunion d'un nombre fini de courbes fermées, à déformations près.

2. Algébrique, où l'on dénombre des croisements par exemple, et où l'on associe les groupes aux nœuds.

3. Géométrique, où l'on tient compte de la forme du noeud, en mesurant longueurs ou angles ; en particulier, l'idée de nombre de rotations apparaît sous la forme de vrillage et de nombre d'entrelacements, et ces notions sont fondamentales pour l'étude des ADN en biologie moléculaire.

L'articulation entre ces points de vue est délicate. Il y a des évidences difficiles à prouver rigoureusement – qu'on songe au théorème de Jordan qui affirme qu'une courbe fermée plane, sans croisement, délimite un intérieur et un extérieur ! Il a fallu presque deux siècles pour définir correctement la notion de courbe, et il y a des nœuds sauvages à écarter avant toute classification. Il faut du soin pour définir correctement les déformations des noeuds, que le mathématicien appelle "isotopies".

L'idée mathématique la plus efficace pour l'étude des noeuds est celle de "noeud invariant". Un invariant d'un noeud est une caractéristique qui reste inchangée lors d'une déformation. Si nous disposons d'un invariant, nous pouvons affirmer que deux noeuds sont vraiment différents quand l'invariant ne prend pas la même valeur pour les deux noeuds. Mais si deux noeuds ont le même invariant, nous ne pouvons affirmer qu'ils sont du même type (déformable l'un en l'autre). Il faudrait pour cela disposer d'un système complet d'invariants. Le mathématicien russe V. Vassiliev a introduit en 1990 une classe nouvelle d'invariants ; il reste à les rendre explicitement calculables et à prouver qu'ils forment un système complet, comme on le pense généralement.

Henri Poincaré a introduit vers 1900 la notion de groupe fondamental d'un espace, qui décrit les possibilités de parcours avec retour au point de départ. Appliqué à l'espace extérieur à un noeud, cela fournit le "groupe du noeud" et le "polynôme d'Alexander" qui lui est lié.

La même construction appliquée à ce qu'on appelle l'espace de configuration donne une définition efficace des groupes de tresses. Ces groupes ont été introduits, sous une forme intuitive, vers 1920, par le mathématicien viennois Emil Artin, un des pères de l'algèbre moderne. Dès 1937, le mathématicien russe Markov relie les nœuds et les tresses, et donne une méthode théorique pour définir, au moyen des tresses, des invariants des noeuds.

Il y a 15 ans, les groupes de tresses étaient une curiosité et leur complexité était rebutante. Puis, brusquement, ils sont devenus un thème central de la recherche scientifique. Donnons une idée de la diversité des points de vue qui mènent aux groupes de tresses :

1. En géométrie, le mathématicien russe Vladimir Arnold a classifié sous le nom de "catastrophes" des singularités de configurations géométriques, qui amènent aux espaces de configuration.

2. En algèbre, plus précisément dans la théorie des groupes, deux avatars des groupes de tresses (les groupes de Coxeter et les algèbres de Hecke) jouent un rôle central.

3. En mécanique statistique, l'étude des modèles exactement résolubles se fait grâce à l'emploi des relations de Yang-Baxter et des groupes quantiques ; le lien avec les groupes de tresses est profond.

4. La physique à deux dimensions a pris récemment beaucoup d'importance, et on en attend un modèle de la supraconductivité à haute température. La classification usuelle des particules en fermions et bosons se complique à deux dimensions. La notion nouvelle est celle d'anyon, dont le modèle mathématique est lié aux groupes de tresses.

5. La théorie quantique des champs est le modèle mathématique des particules élémentaires. Edward Witten a fait le pont entre cette théorie et les groupes de tresses, via le polynôme de Jones.

La théorie des noeuds constitue ainsi une interface très active entre physique et mathématiques. Les noeuds et les tresses fournissent aujourd'hui un outil de modélisation efficace de la physique des polymères aux cristaux liquides, en passant par la biologie moléculaire. Dans la direction opposée, les idées importées de la physique ont déclenché une révolution en mathématiques : d'un sujet un peu marginal il y a encore 15 ans, la théorie des nœuds est devenue aujourd'hui l'un des grands chantiers mathématiques.

NOEUDS DE TAIT

L'objectif principal de la théorie des nœuds est de classifier tous les nœuds et trouve son origine dans la physique au début du 19ème siècle comme nous en avons déjà fait mention. Pourquoi ?

Rappelons qu'à cette époque, les atomes étaient un mystère : pourquoi ceux-ci semblaient-ils indestructibles et pourtant existant en tellement de variétés et capables de se combiner pour donner d'innombrables autres composants ?

A cette époque, les plus belles équations de la physique (qui sont souvent de bons candidats pour expliquer des choses que nous ne comprenons pas…) étaient les équations de Maxwell, il était alors naturel (ou tentant) pour les physiciens d'essayer d'expliquer la mécanique atomique en terme d'électromagnétisme, même si nous savons aujourd'hui que cette voie était destinée à l'échec. Plus tard au milieu du 19ème, les ondes électromagnétiques étaient largement conceptualisées comme des vibrations d'un milieu appelé à l'époque "éther luminophore". Le référentiel de cet éther était alors défini (ou du moins supposé) comme étant un référentiel absolu. Mais seulement… plus tard, les expérimentateurs Michelson et Morley, montrèrent que le mouvement relatif de notre planète dans cet éther était indétectable (et même pire… ils mesurèrent la constance absolue de la vitesse de lumière!). Leurs expériences amenèrent par ailleurs Einstein et Poincaré a développer leur fameuse théorie de la relativité restreinte (voir chapitre de mécanique relativiste)..

Il était alors à l'époque très gênant de travailler avec le concept suivant : il y a avait des ondes sans rien qui ondulait ! Ceci du au fait, qu'à l'époque, les physiciens avaient fortement tendance à comprendre l'électrodynamique avec des analogies mécaniques. Maxwell, par exemple, a passé pas mal de temps à conceptualiser les champs électriques et magnétiques en terme de "tubes fins, de section variable, transportant un fluide incompressible". Une raison pour cela était la forme des équations de Maxwell dans le vide (voir le chapitre d'électrodynamique) :

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0} \quad (6)$$

ce qui est, il est vrai, similaire à la mécanique des fluides (voir chapitre du même nom) où nous avons pour un fluide incompressible sans viscosité et sans tourbillons :

$$\vec{\nabla} \circ \vec{v} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \quad (7)$$

Plus généralement, dans le cas où la rotationnel $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ est non nul, Helmoltz montra en 1858 que les lignes de champ du vortex – définies par les lignes de $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ - se déplacent dans la direction de $\vec{v}$ comme si elles avaient une existence propre (alors là c'est la brèche ouverte bien évidemment…!). Ces lignes ne pouvaient avoir de fin mais pouvaient former des boucles.

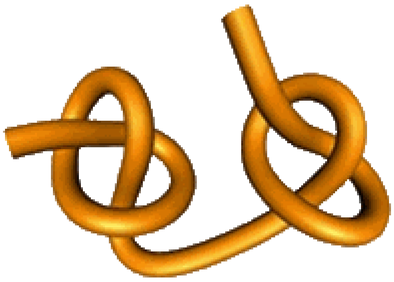
En 1867 le mathématicien P. G. Tait (assistant de Hamilton et un champion des quaternions) trouva une méthode ingénieuse pour démontrer cet effet en coupant un trou circulaire dans une boîte, en remplissant celle-ci avec de la fumée, et en expulsant ensuite la fumée par compression de l'air dans la boîte formant ainsi des cercles de fumée. Il montra par ailleurs ceci a son ami Kelvin qui nota l'analogie avec l'électromagnétisme et proposa une théorie dans laquelle les atomes étaient des vortex (nœuds) dans l'éther ! Il émit l'hypothèse que les différentes types d'atomes correspondaient a différents types de vortex noués (oui c'est un peu tiré par les cheveux mais bon...) !

Tait essaya par la suite de classifier (voir tableau plus bas) les lignes nouées en accord avec :

1. Le nombre d'entrelacements quand celles-ci sont projetées sur un plan

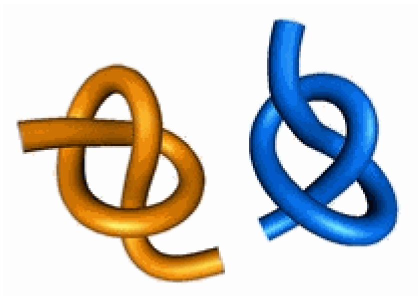
2. En ne représentant que les "noeuds premiers"

Définition: Un nœud peut être compliqué parce qu'il est la succession de nœuds simples :



(8)

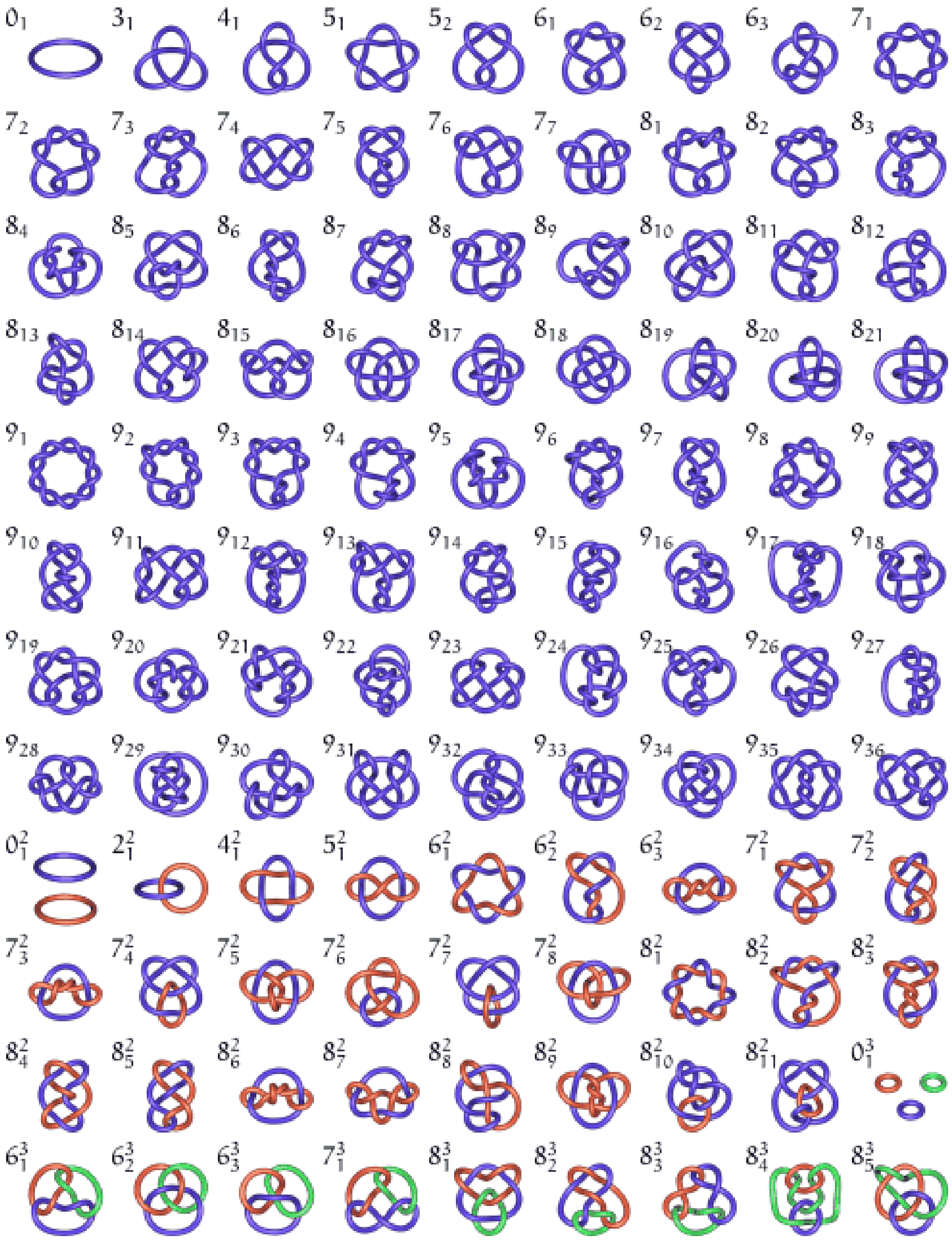
Ces nœuds simples (à un brin) peuvent être séparés en coupant la corde.



(9)

Un nœud premier est donc un nœud qui ne peut être séparé en nœuds plus simples : couper la corde dénoue le nœud.

Classifier les nœuds c'est donc chercher à déterminer les briques élémentaires : tous les nœuds premiers. La liste que Tait obtint dans un premier temps fut les nœuds suivants (dans l'espoir d'obtenir la tableau périodique des éléments version "éther"...) et si nous vous conseillons au besoin de vous munir d'une ficelle pour vous assurer qu'ils sont bien premiers (des fois cela est difficile mentalement) :



(10)

Remarque: Ce tableau est très important nous y ferons très souvent référence lors d'exemples applicatifs en utilisant la nomenclature qui y est proposée.

La beauté de cette théorie des "atomes vortex" résidait dans le fait qu'il était en accord avec l'aspect continu du monde merveilleux des fluides, ou aux équations de Maxwell par extension, pour discrétiser les différentes types d'atomes. Un difficulté cependant avec cette théorie était la remarquable stabilité des atomes. En 1905 Kelvin admit qu'après de nombreuses années d'échecs à tenter de prouver que le mouvement des cercles de Helmoltz était stable, que la conclusion était que ces cercles étaient essentiellement instables et devaient donc se dissiper. Curieusement c'est cette stabilité extrême des atomes qui fut une des pièces du puzzle pour construire la physique quantique corpusculaire.

De plus, avec la théorie de la relativité, le concept d'éther cher à Maxwell et ses contemporains, en particulier en ce qui concerne la théorie des nœuds, devint synonyme d'un concept inutile et avec en plus la théorique quantique la théorie des atomes vortex fut complètement oubliée. La théorie des nœuds ressurgit à cause de quelques conjectures que Tait ne fut pas capable de démontrer (nous y reviendrons) qui le furent seulement dans les années 1980 dans un tournant hasardeux de la physique théorique.

Ce que les physiciens abandonnèrent intrigua et continue d'intriguer les mathématiciens. La question de base restant la même : comment pouvons nous dire que deux nœuds sont "isotopes" (nous définirons plus loin de quoi il s'agit). Cette question est intimement reliées aux fameuses conjectures de Tait. Pour attaquer ces conjectures et les questions basiques de ressemblance des nœuds, les topologistes ont développé les nœuds invariants. Un exemple d'un nœud invariant connu et ayant eu beaucoup de succès sont les polynômes d'Alexander découverts par J. W. Alexander en 1927. Ainsi, si les polynômes de deux nœuds sont différents, ceux-ci ne sont alors pas isotopes. Malheureusement, il existe quelques noeuds ayant des polynômes d'Alexander équivalents et qui sont pourtant non isotopes…

La théorie mathématique des noeuds se développe alors pendant une cinquantaine d'années et était un peu tombée en désuétude lors du coup de tonnerre de la découverte par Jones en 1984 d'un nouvel invariant des noeuds (le polynôme de Jones). La découverte de Jones est assez exemplaire du point de vue scientifique et peut donner lieu à méditation sur l'organisation actuelle de la science. Jones n'était pas du tout un spécialiste des noeuds. Il s'intéressait à la classification des facteurs dans les algèbres de Von Neumann (analyse fonctionnelle). Il a obtenu des algèbres de matrices dont les relations de commutation (équations de Yang-Baxter) étaient proches des relations du groupe de tresses. Des tresses aux noeuds, il n'y a qu'un pas qu'il a franchi avec l'aide de Joan Birman qui est une spécialiste des noeuds.

Nous assistons ensuite à une explosion de découvertes : version purement combinatoire, nouveaux polynôme, etc. En 1989, Witten montre que le polynôme de Jones peut être obtenu à partir de la théorie quantique des champs au moyen d'une intégrale de Feynman, donnant ainsi la première définition n'utilisant pas les projections planes du noeud. D'une certaine fa¸con la théorie de Jones-Witten est une extension non commutative du travail de Gauss. Le groupe de Lie (cf. chapitre d'Algèbre Ensembliste) qui intervient en magnétisme est $U(1)$, alors que l'invariant de Witten est une intégrale de Feynman sur un espace de $SU(2)$-connections.

FORMALISATION MATHÉMATIQUE

Un noeud est modélisé mathématiquement par une application injective, différentiable et dont la dérivée ne s'annule pas, du cercle dans l'espace orienté de dimension 3. Un problème central est de pouvoir décider de façon calculable si le noeud est trivial (peut se défaire sans couper la ficelle...) ou non (ce problème n'est pas résolu). Nous associons au noeud des objets mathématiques calculables (polynômes, nombres) appelés "invariants du nœud" et qui sont insensibles à une déformation du noeud. Si l'invariant n'est pas égal à celui du noeud trivial, on est sûr que le noeud n'est pas trivial. Le problème est donc de trouver des invariants assez fins. Nous en décrirons deux :

1. Le nombre d'entrelacement (de 2 noeuds) du à Gauss et qui intervient en électromagnétisme

2. Le polynôme de Jones (introduit dans les années 85 par Vaughan Jones médaille Fields 1990), qui est assez subtil pour distinguer par exemple le noeud de trèfle droit du gauche.

Nous décrirons aussi une classe générale d'invariants : les invariants de type fini ou de Vassiliev. Ces invariants définis de façon assez peu constructive sont peut-être des invariants complets, mais nous ne le savons pas à ce jour. Nous décrirons le nombre d'entrelacement de 2 noeuds comme un invariant combinatoire calculable à partir d'un diagramme des noeuds. Nous écrirons ensuite la formule intégrale classique liée au magnétisme (Gauss) pour le calculer. Nous ferons alors un petit détour par la géométrie différentielle globale des courbes de l'espace tridimensionnel pour montrer la formule de White qui relie 3 invariants géométriques associés à un ruban. Nous décrirons ensuite les nouveaux invariants polynomiaux d'un point de vue combinatoire. Le point de vue intégrales de Feynman sera évoqué.

Vassiliev a introduit une famille générale d'invariants qui contient la plupart des invariants connus et dont nous pouvons dire qu'ils sont de type fini. Nous en décrirons le principe.

Remarque: Nous avons délibérement choisi de ne pas énumérer un certain nombre de définitions (aussi nombreuses qu'en théorie des graphes) que le lecteur pourra trouver facilement dans littérature ou sur Internet (comme les mouvements de Reidemeister qui ne servent formellement à rien!). Nous nous permettons de le omettre dans le sens qu'elle ne nous seront pas utiles dans l'application de la théorie des noeuds en physique quantique des champs (et que mis à part pour ceux qui aiment faire de petis dessins elles sont inutiles).

Définitions:

D1. Un nœud peut-être défini (car il existe plusieurs définitions possibles et certaines ont de petits aléas assez embêtants...) par l'image du cercle noté S^1 par une application continue (la ficelle étant supposée telle quelle), injective (ceci évitant que la ficelle rentre dans elle-même) :

$$f : S^1 \to \mathbb{R}^3 \quad (11)$$

autrement dit, c'est une courbe sans point double, tracée dans l'espace euclidien de dimension trois.

Un nœud est donc représenté par une application injective $f \in C^1\left([0,1],\mathbb{R}^3\right)$ (imposer des nœuds de classe C^1 permet d'éviter d'avoir des courbes trop... sauvages) vérifiant que $f(0) = f(1)$ (nœud fermé). L'image de *f* est parfois appelée "support du nœud *f*" : c'est la réalisation "physique" du nœud dans l'espace.

Remarque: L'ensemble des nœuds sera par la suite noté par la lettre *N*

D2. Nous disons qu'un nœud est un "nœud trivial" si l'application *f* qui le définit se prolonge en une application du disque $D^2 \to \mathbb{R}^3$ continue et toujours injective : un nœud trivial est donc un nœud qui bord un disque plongé de $\mathbb{R}^3$.

D3. Deux nœuds γ_1, γ_2 sont équivalents s'il existe une application continue :

$$F : [1,2] \to N \quad (12)$$

telle que $F(1) = \gamma_1$ et $F(2) = \gamma_2$. Reste donc à trouver *F* qui est une courbe dans l'espace des courbes.

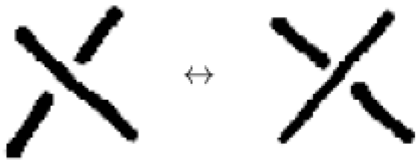
Pour résumer grossièrement..., un nœud est une ficelle dont nous avons soudé les deux extrémités.

D3. Le $c(K)$ d'un nœud K est le nombre entier naturel représentant le nombre minimum de croisements pour tout diagramme d'un type de nœud (c'est une mesure naturelle de complexité).

Exemple:

Le nœud 0_1 à un $c(K)=c(0_1)=0$ nul. Il n'existerait pas de nœuds avec un $c(K)$ est à un ou à l'unité. Une preuve consiste à énumérer tous les diagrammes possibles avec un ou deux croisement et de voir que ceux sont au fait sont des nœuds équivalents de type 0_1 ou des entrelacs. Le trèfle (nœud 3_1) a un $c(K)=c(3_1)=3$.

D4. L'image miroir $\overline{K}$ d'un nœud K est obtenu par réflexion sur un plan dans R3. Le nœud K peut-être construit par inversion des croisement du diagramme du nœud :

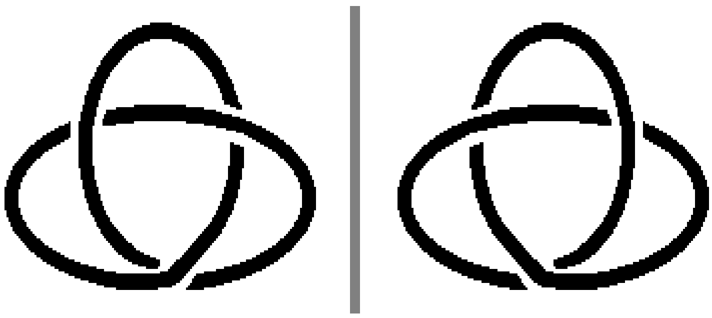


(13)

Nous pouvons acilement nous en convaincre en prenant une réflexion en pliant la page de lecture ou encore mieux… en s'équipant du matériel adéquat et d'un mirroir (...).

Exemple:

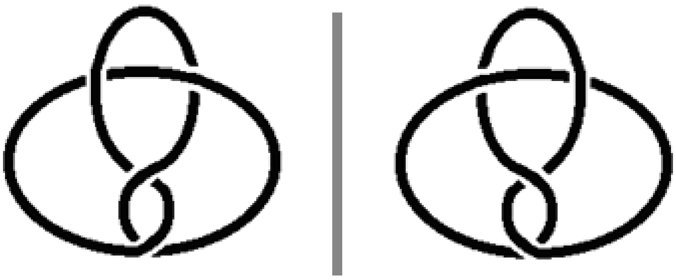
Avec le nœud 3_1 ("trèfle gauche" et "trèfle droite") :



(14)

D5. Deux nœuds sont dits "noeuds isotopes" si nous pouvons passer de l'un à l'autre par des manipulations continues (le trèfle gauche et le trèfle droit ne sont par exemple pas isotopes!) et il s'agit du problème numéro 1 de la théorie des noeuds : détecter les noeuds isotopes.

D6 Deux nœuds sont dits "noeuds équivalents" s'ils sont isotopes ou si l'un est isotope à l'image de l'autre dans un miroir. D'après ce qui précède, chaque noeud est donc forcément équivalent à sa propre image-miroir mais seuls les noeuds réflexifs sont isotopes à leur image dans un miroir. Le noeud en huit 4_1 est un bon exemple de ce genre de noeuds, noeuds par ailleurs assez rares :



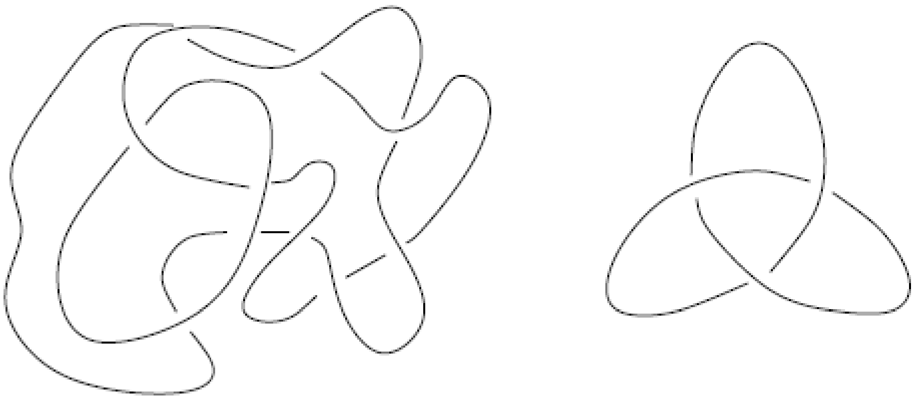
(15)

D7. Un "entrelac" est une sous-variété (voir chapitre de géométrie différentielle) compacte (voir chapitre de topologie), de classe C^{∞} et de dimension 1. Le "nombre de composantes connexes" de est noté $c(E)$. Si $c(E)=1$ nous disons que E est un nœud.

La plupart du temps les entrelacs seront orientés ("orientés" dans le même sens que les graphes orientés – cf. chapitre de théorie des graphes), et nous identifierons les entrelacs isotopes. Nous représentons donc les entrelacs dans le plan en les projetant et en spécifiant le type de points de croisement.

Exemple:

Entrelacs à trois composantes connexes et nœud de trèfle.

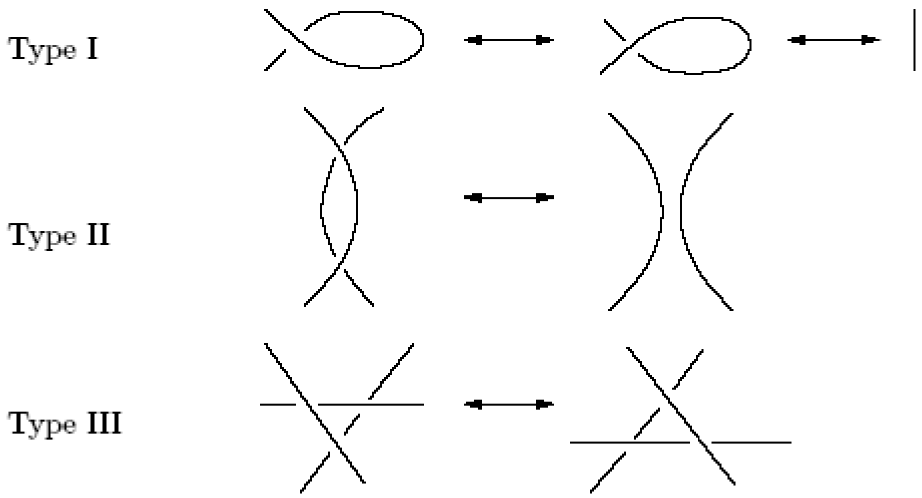


(16)

Les isotopies permettent de déméler les entrelacs.

Définition: Une "isotopie" est une opération qui laisse un noeud invariant. En d'autres termes, c'est un mouvement du noeud qui ne le déforme pas.

Elle donnent dans le plan trois types de mouvements particuliers appelés "mouvements de Reidemeister" :



(17)

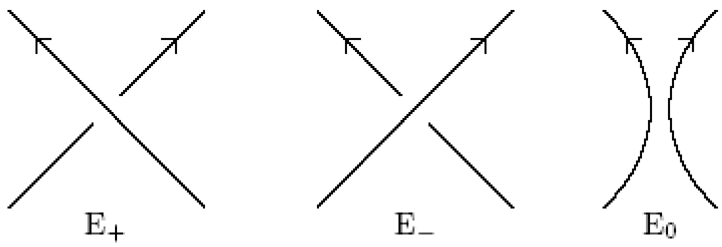
En biologie les brins d'ARN et ADN ainsi que les filaments d'acides aminés s'enroulent selon des formes tridimensionnelles complexes (ce sont des tresses fermées : un cas plus général des noeuds). Or, souvent, au travers des microscopes, nous ne voyons qu'une projection bidimensionnelle. Les invariants permettent de remonter à des informations tridimensionnelles à partir des vues 2D que nous avons.

Il existe également un théorème comme quoi deux entrelacs sont isotopes si et seulement si nous pouvons passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister.

Démonstration : A faire avec un lacet....

$\square$C.Q.F.D.

D8. Trois entrelacs E_+, E_-, E_0 sont dits "entrelacs associés" (ou "entrelacs en association") s'ils ne diffèrent qu'en un point de croisement et qu'en ce point ils sont dans une des configurations suivantes :



(18)

Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des classes d'entrelacs et nous nous intéressons désormais à des fonctions $P : \mathcal{E} \to A$ où A sera un anneau commutatif (le lecteur n'oubliera pas que nous avons vu que les coefficients de polynômes sont des éléments d'un anneau).

Remarque: Il faut aussi se rappeler qu'un nœud est une courbe et que toute courbe peut être représentée par un polynôme d'où l'idée!

D9. P est dit "invariant par association" (par association des entrelacs...) si $P(\bigcirc)=1$ et s'il existe $a_+, a_-, a_0 \in A$ inversibles (!) tel que pour tout triplet d'entrelacs associées (E_+, E_-, E_0) nous ayons :

$$a_+ P(E_+) + a_- P(E_-) + a_0 P(E_0) = 0 \quad (19)$$

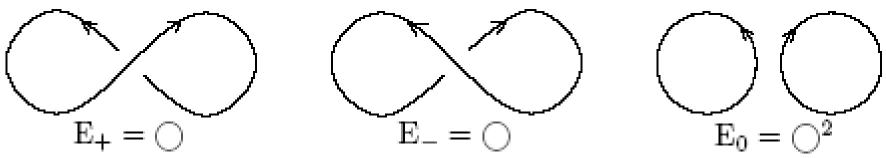
Nous pouvons déjà démontrer de façon assez élémentaire que si un tel polynôme existe, alors il est uniquement déterminé par les coefficients de la relation précédente. Nous résumons cela dans le théorème suivant : Si P est invariant par association, alors il est uniquement déterminé par les coefficients a_+, a_-, a_0.

Démonstration :

Remarquons d'abord que :

$$\forall r \in \mathbb{N} \quad P(\bigcirc^r) = \left(-\frac{a_+ + a_-}{a_0}\right)^{r-1} \quad (20)$$

où $\bigcirc^r$ désigne le nœud composé de r cercle démêlés. En effet, la relation $P(\bigcirc)=1$ et la propriété d'invariance de P appliquée aux entrelacs suivants :



(21)

donne :

$$a_+ P(\bigcirc) + a_- P(\bigcirc) + a_0 P(\bigcirc^2) = 0 \quad (22)$$

Nous obtenons alors :

$$P(\bigcirc^2) = -\frac{a_+ P(\bigcirc) + a_- P(\bigcirc)}{a_0} = -\frac{a_+ P(\bigcirc)\cdot 1 + a_- \cdot 1}{a_0} = \left(-\frac{a_+ + a_-}{a_0}\right)^{2-1} \quad (23)$$

Ainsi, par récurrence sur r nous obtenons :

$$P(\bigcirc^r) = \left(-\frac{a_+ + a_-}{a_0}\right)^{r-1} \quad (24)$$

□C.Q.F.D.

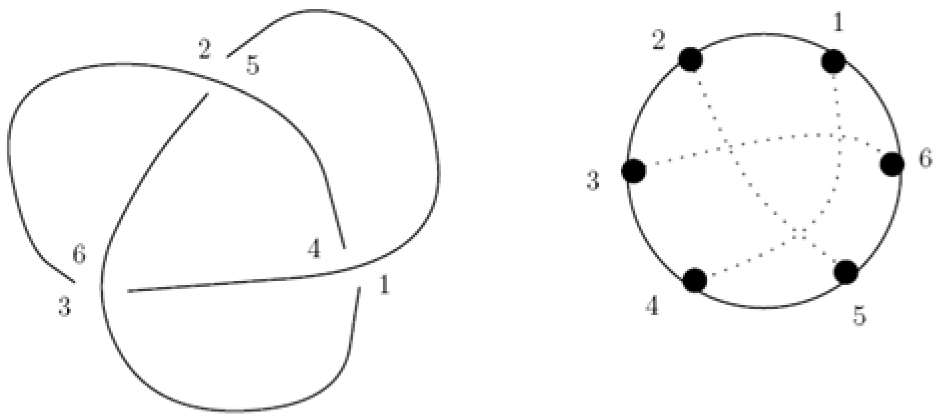
En d'autres termes, la fonction *P* peut s'exprimer uniquement par ses coefficients !!! Donc nous pourrions maintenant essayer de voir si un nœud plein d'entrelacs peut être toujours se ramener à des $P(\bigcirc)$ de manière récursive.

Remarque: Il fallait y penser cependant….

REPRÉSENTATION PLANAIRE

Nous supposons que le nœud est dans l'espace euclidien de dimension trois orienté. Nous nous intéressons aux projections de ce nœud sur le plan $z = 0$. Il est claire intuitivement que nous pouvons supposer que nœud n'a aucune tangente verticale et que les points de croisement sont seulement doubles et transversaux. Une telle projection sera appelée "bonne projection".

Nous indiquons ensuite à chaque point de croisement quel est le brin qui passe au-dessus de l'autre. Un tel dessin représente un nœud de façon non ambiguë : nous disons que nous avons un "diagramme de nœud". Bien sûr, deux nœuds équivalents ont des bonnes projections qui donnes des diagrammes de nœuds différents en général (c'est là que réside une des difficultés aussi) Il est donc important de pouvoir lire l'équivalence de deux noeuds directement sur leurs diagrammes. Un diagramme du nœud du trèfle droit 3_1 :



(25)

Remarque: Le noeud de trèfle est le noeud ayant le nombre minimal de croisements, à savoir 3 ; il en existe en fait deux, énantiomorphes (images l'un de l'autre par réflexion). Il s'agit au fait d'un simple noeud dont on a soudé les extrémités. Le noeud de trèfle est enfin le bord d'un ruban de Möbius à 3 demi-torsions ainsi que le noeud torique d'ordre (3,2) (3 enroulements autour du tore, sur deux tours), ainsi que celui d'ordre (2,3).

Comme un dessin n'est pas forcément facile à transmettre, ni à mettre dans un ordinateur, nous pouvons aussi donner un codage du diagramme du nœud par une matrice à cœfficients entiers à trois lignes et dont les nombre de colonnes est égal au nombre de points doubles.

Nous numérotons les *2n* points de croisement sur la courbe fermée (cercle) dans l'ordre où ils arrivent. Nous remarquons que les paries sont toutes formées d'un nombre pair et d'un nombre impair. Nous fabriquons alors les deux premières lignes de la matrice en mettant dans chaque colonne les deux numéros donnant la même projection : les impaires sur la première ligne, les pairs sur la seconde. Nous ajoutons alors à chaque colonne, un ± 1 qui indique l'orientation des 2 brins (orienté)

(+1 si celui de dessous traverse de droite à gauche quand nous parcourons celui de dessus, -1 sinon).
Par exemple, la matrice associée au noeud de trèfle de la figure précédente est :

$$3_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ + & + & + \end{bmatrix} \qquad (26)$$